Derivadas II (Teoremas importantes)

Introducción

En el presente capítulo se pone de manifiesto la potencia de la derivada como herramienta para obtener información acerca de una función.

Empezaremos viendo los teoremas de Rolle y del valor medio y presentaremos algunas de sus importantes consecuencias y aplicaciones. Entre éstas veremos la regla de L'Hôpital, que permite resolver muchas indeterminaciones en el cálculo de límites.

El teorema de Taylor aborda el problema de la aproximación local de una función f, proporcionando un polinomio de grado n cuyo valor y el de sus n primeras derivadas en un punto a coinciden con los valores correspondientes de f.

1. Teoremas del valor medio

Empezaremos esta sección dando la definición de extremo local y la condición necesaria de extremo en términos de derivadas, ya que esta idea es básica en los teoremas que siguen; si bien el estudio de la determinación de extremos se completará en el próximo capítulo.

1.1. Definición. Extremo local

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$. Se dice que

a) x_0 es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, de modo que

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$$

b) x_0 es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, de modo que

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$$

1.2. Teorema.

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un máximo (mínimo) relativo en x_0 y f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.

1.3 Teorema de Rolle

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

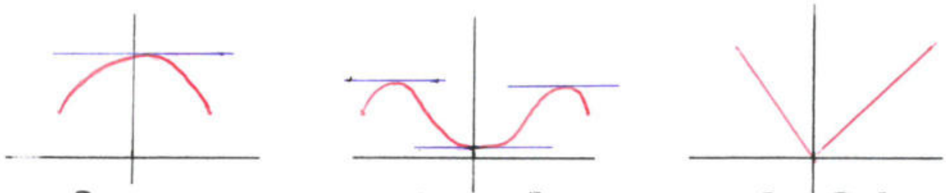

Fig 8.4 Fig 8.5 Fig 8.6

NOTAS:

1) Si la función es constante, tiene derivada nula en todos los puntos del intervalo. En caso contrario, tiene algún extremo (Fig 8.4).
2) El teorema asegura que existe un x_0, pero no tiene que ser único (Fig 8.5).
3) La condición de derivabilidad en todos los puntos del intervalo no se puede quitar (Fig 8.6)
4) El teorema de Rolle permite asegurar que entre dos raíces de una función derivable hay al menos una raíz de su derivada.

1.4 Teorema del valor medio de Lagrange

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1.5. Interpretación geométrica

Si $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ entonces $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la cuerda AB. El teorema del valor medio nos asegura que hay un punto x_0 entre a y b en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela a la cuerda AB.

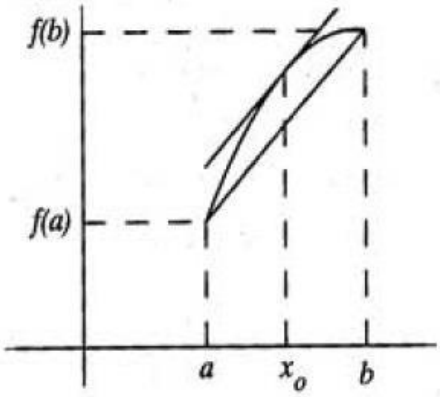

Fig. 8.7

1.6. Corolario.

Si la función f está definida en un intervalo I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

NOTA: *Si dos funciones definidas en un intervalo tienen la misma derivada, se diferencian en una constante.*

1.7. Teorema del valor medio generalizado de Cauchy

Si f, g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big)$$

Si además $g(a) \neq g(b)$ la igualdad anterior puede escribirse de la forma

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

2. Consecuencias de los teoremas

2.2. Teorema de Darboux

Sea f una función derivable en un conjunto que contiene al intervalo $[a, b]$.
Si $f'(a) < c < f'(b)$ entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = c$.

2.3. Teorema.

Si $f : (a, b) \longrightarrow I\!R$ es una función derivable con derivada acotada en (a, b) entonces f es uniformemente continua en (a, b).

NOTA: *El teorema también es cierto para intervalos de longitud infinita.*

2.4. Regla de L'Hôpital

Sean f, g derivables en un entorno (tal vez perforado) de un punto $a \in I\!R$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, verificándose

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NOTAS:

1) *El enunciado del teorema también es válido cuando*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

Así mismo, se puede formular de manera análoga si a es $+\infty$ ó $-\infty$.

2) *Si en la expresión $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar la regla de L'Hôpital (siempre y cuando se cumplan las hipótesis de aplicabilidad).*

3. Aproximación de funciones mediante polinomios.

Teorema de Taylor

Los polinomios son funciones de fácil manejo, que son muy apropiados para los cálculos numéricos. Muchas funciones (no todas) se pueden aproximar por polinomios, y esto

3.1. Teorema.

Sea f una función con derivadas hasta de orden n en un punto a. Entonces existe un polinomio $P(x)$, y sólo uno, de grado menor o igual que n, que satisface

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad \dots \quad P^{(n}(a) = f^{(n}(a)$$

y viene dado por

$$(*) \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$$

con el convenio $f^{(0} = f$.

3.2. Definición. Polinomio de Taylor

Al polinomio $(*)$ se le llama polinomio de Taylor. Con más precisión, se dice que es el polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a, y se escribe $T_n(f,a)(x)$.

NOTA: *Si no ha lugar a confusión, escribiremos $T_n(x)$ en lugar de $T_n(f,a)(x)$.*

3.3. Teorema.

Sea f una función n veces derivable en el punto a y sea $T_n(f,a)$ su correspondiente polinomio de Taylor. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

3.4. Definición. Resto

Si f es una función para la cual existe polinomio de Taylor de orden n en el punto a, $T_n(f,a)$, se define el resto de orden n de f en a por

$$R_n(f,a)(x) = f(x) - T_n(f,a)(x)$$

NOTA: *Por el teorema anterior, $R_n(f,a)$ es un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$.*

3.5. Teorema. Fórmula de Taylor con resto

Si las funciones f, f', f'', ..., $f^{(n+1}$ están definidas sobre $[a,x]$ existe $t \in (a,x)$ tal que el resto de Taylor de orden n de f en a viene dado por

$$R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta expresión se conoce como forma de Lagrange del resto y con ella se puede escribir

COMENTARIO: *Existen otras expresiones para el resto, por ejemplo la forma de Cauchy es*

$$R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-t)(x-a)^n$$

OBSERVACIONES:

1) *El polinomio de Taylor $T_n(f,a)$ es el polinomio de grado menor o igual que n que mejor aproxima a f en un entorno de a, pero es preciso señalar el carácter local de esta aproximación. El error $f(x)-T_n(f,a)(x)$ es precisamente el resto; con frecuencia haciendo n suficientemente grande se puede conseguir que éste sea tan pequeño como se quiera, pero a veces esto no es así, como se verá en el problema 19.*
2) *Se denomina fórmula de McLaurin de f a la fórmula de Taylor desarrollada en el punto $a=0$, es decir:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Analizar si es posible aplicar el teorema de Rolle a las funciones siguientes en los intervalos dados:*
   a) $f(x) = |x|$ *en* $[-1,1]$.
   b) $g(x) = x$ *en* $[1,2]$.
   c) $h(x) = x^2-(a+b)x+ba$ *en* $[a,b]$.
   d) $k(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ *en* $[-1,1]$.

SOLUCIÓN:

a) La función f es continua en $[-1,1]$, es derivable en $(-1,1)-\{0\}$ y $f(-1)=f(1)=1$. Pero no se puede aplicar el teorema de Rolle ya que no se cumple la hipótesis de derivabilidad (f no es derivable en $0 \in (-1,1)$).
De hecho, no se cumple la conclusión del teorema, ya que

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y la derivada no se anula en ningún punto.

c) h es una función polinómica y como tal es continua y derivable en todo $I\!R$ y en particular en el intervalo dado. Además

$$h(a) = a^2 - (a+b)a + ab = 0$$
$$h(b) = b^2 - (a+b)b + ab = 0$$

Luego por el teorema de Rolle existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$.

En este caso se puede determinar el valor de c: dado que $h'(x) = 2x - (a+b)$, debe ser $c = \dfrac{a+b}{2}$.

d) k es continua en $[-1,1]$ y $k(-1) = k(1) = 1$.

Estudiamos ahora la derivabilidad de k, que es clara en $(-1,1) - \{0\}$. En el punto 0 se tiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

como $0 \neq -1$, k no es derivable en 0, y por tanto no se puede aplicar el teorema de Rolle.

6. *Localizar en intervalos disjuntos de longitud 1 las raíces del polinomio*

$$P(x) = 4x^4 - 20x^3 + 31x^2 - 4$$

SOLUCIÓN:

Observemos que, por el teorema de Rolle, entre cada dos raíces de P debe haber una raíz de P'. En efecto, si a, b son raíces de P, como P es continua y derivable en todo $I\!R$ y $P(a) = P(b)$ existe $c \in (a,b)$ tal que $P'(c) = 0$

En este caso, $P'(x) = 16x^3 - 60x^2 + 62x$ y su única raíz real es $x = 0$. Así, en $(0,\infty)$ no hay ninguna raíz de P', por lo tanto a lo sumo hay una raíz de P. Por la misma razón, en $(-\infty, 0)$ hay a lo sumo una raíz de P.

Por otra parte,

$$P(0) = -4, \quad P(1) = 11, \quad P(-1) = 51$$

Como consecuencia, usando el teorema de Bolzano se puede afirmar que P tiene una raíz c_1 en $(-1,0)$ y otra c_2 en $(0,1)$. Además, estas dos son las únicas raíces de P.

7. *Sea* $f : [0,\infty) \longrightarrow I\!R$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Veamos si es posible aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[0,2]$: f es continua en $[0,2]-\{1\}$ y derivable en $(0,2)-\{1\}$ de modo trivial. Veamos qué ocurre en el punto $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1)$$

luego f es continua en 1 y en consecuencia continua en $[0,2]$.

Estudiamos ahora la derivabilidad:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h(1+h)} = -1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{3-(1+h)^2}{2}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h-h^2}{2h} = -1$$

Luego f es derivable en 1 y se cumplen todas las hipótesis del teorema del valor medio, por lo que existe $c \in [0,2]$ tal que $f'(c) = \frac{-1}{2}$.

Intentamos encontrar c:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Luego si $c = \frac{1}{2}$ es $f'(c) = \frac{-1}{2}$. El punto c no es único ya que si $c = \sqrt{2} > 1$ también verifica $f'(c) = \frac{-1}{2}$.

15. *Calcular, usando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x} \quad (\beta \neq 0)$ *b)* $\lim_{x\to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right]$ *c)* $\lim_{x\to 0} x^x$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1+2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{sen}^4 x}$ *e)* $\lim_{x\to a} \frac{\cos x \log(x-a)}{\log(e^x - e^a)}$

b) Operando dentro del corchete y aplicando después L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\log x+1-1}{\log x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-x+1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Podemos observar que se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital.

c) Hacemos este límite usando la continuidad de la función logaritmo

$$\lim_{x\to 0}x^x=e^{\log\lim\limits_{x\to 0}x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\log x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\log x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x}}$$

Aplicando L'Hôpital en el exponente se obtiene

$$\lim_{x\to 0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{x}}=e^0=1$$

d) Empezamos aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos^3 x-3\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{sen}^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-6\cos^2 x\operatorname{sen}x-3\frac{-\operatorname{sen}2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{4\operatorname{sen}^3 x\cos x}$$

Simplificamos antes de volver a aplicar L'Hôpital y obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos^3 x-3\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{sen}^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x\operatorname{sen}2x+\frac{3\operatorname{sen}2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{2\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+\frac{3}{\sqrt{\cos 2x}}}{2\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen}x+3\frac{\operatorname{sen}2x}{\sqrt{\cos 2x}\cdot\cos 2x}}{4\operatorname{sen}x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4\cos x}+\frac{3}{2\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}$$

e) Si aplicamos directa y reiteradamente la regla de L'Hôpital obtenemos

$$\lim\frac{\cos x\log(x-a)}{\ldots}=\lim\frac{-\operatorname{sen}x\log(x-a)+\frac{\cos x}{x-a}}{\ldots}=$$

vemos cómo cada vez se nos complica más el límite. Tendremos que reconsiderar la situación: vamos a sacar el "coseno" de la fracción y a derivar en lo que queda

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}=\lim_{x\to a}\cos x\frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}=$$

$$=\cos a\lim_{x\to a}\frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}=\cos a\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}=$$

$$=\cos a\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}=\cos a\lim_{x\to a}\frac{e^x}{e^x(x-a)+e^x}=\cos a$$

16. *Dada la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ se pide*

a) El polinomio de Taylor de cuarto grado de f en $x=0$.

b) Calcular un valor aproximado de $\sqrt{1'02}$ utilizando un polinomio de segundo grado y dando una estimación del error cometido.

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2} & f(0)&=1\\ f'(x)&=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} & f'(0)&=\frac{1}{2}\\ f''(x)&=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} & f''(0)&=-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2^2}\\ f'''(x)&=\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2} & f'''(0)&=\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}\\ f^{(4}(x)&=-\frac{3\cdot 5}{16}(x+1)^{-7/2} & f^{(4}(0)&=-\frac{3\cdot 5}{2^4}\end{aligned}$$

Luego

$$T_4(\sqrt{x+1},0)(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2}x^2+\frac{3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$$

b) El valor aproximado pedido será

$$\sqrt{1'02}=\sqrt{1+0'02}\approx 1+\frac{1}{2}0'02-\frac{1}{8}0'02^2=1'00995$$

donde el error cometido, evaluado por el método de Lagrange, sería

$$|\text{Error}| < \frac{1}{16} \cdot 0'02^3 = \frac{0'02^3}{16} = 5 \cdot 10^{-7}$$

17. *Obtener el polinomio de Taylor de grado 3 en un entorno del punto $a = 1$ de la función*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

SOLUCIÓN:

Para hallar las derivadas sucesivas, descomponemos en fracciones simples

$$\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Así $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad f(1) = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f'(1) = -1 - \frac{1}{2^2} = -\frac{5}{4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f''(1) = 2 + \frac{2}{2^3} = \frac{9}{4}$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} - \frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4} \qquad f'''(1) = -2 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 3}{2^4} = -\frac{51}{8}$$

Entonces

$$T_3(f,1)(x) = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}(x-1) + \frac{1}{2!}\frac{9}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}\frac{51}{8}(x-1)^3$$

18. *Obtener el polinomio de Taylor de orden dos de la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ en el punto $x_0 = 1$.*

SOLUCIÓN:

Evidentemente la función es dos veces derivable en x_0, además $f(1) = 0$. Calculamos las primeras derivadas de f en el punto x_0.

$f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$, de donde $f'(1) = 1$.

$f''(x) = \dfrac{2 \log x - 3}{x^3}$, de donde $f''(1) = -3$.

En consecuencia el polinomio de Taylor de orden 2 de f en x_0 es

3

SOLUCIÓN:

Observemos que f tiene derivadas de cualquier orden en todo punto de $\mathbb{R}-\{0\}$ ya que es composición de las funciones e^x y $-\dfrac{1}{x^2}$ infinitamente derivables en su dominio. En $x=0$ se tiene:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1/h}{e^{1/h^2}}=0$$

pues e^{1/h^2} es un infinito de mayor orden en el cero que $\dfrac{1}{h}$. Si $x\neq 0$ es $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}\,e^{-1/x^2}$.

La segunda derivada en el 0 es

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\,e^{-1/h^2}}{h^4}=0$$

y repitiendo el proceso se tiene

$$f'''(0)=0 \qquad f^{(4}(0)=0$$

Así el polinomio de Taylor de orden 4 de f en el cero es idénticamente nulo. Es decir en este caso el resto coincide exactamente con el valor de la función.

COMENTARIO: *Esta función es infinitamente derivable en $x=0$ y $f^{(n}(0)=0\ \forall n$, por lo tanto el polinomio de Taylor de cualquier orden es nulo y no permite una buena aproximación de la función.*

20. *Calcular, usando desarrollos de Taylor, los siguientes límites:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{arcsen} x^2}{\sqrt{1+x^2}-\cos x-\frac{5}{6}\log(1-x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^4}\cos x^4}{x(\operatorname{tg} x-\operatorname{senh} x)}$

SOLUCIÓN:

a) Para calcular el límite vamos a obtener los polinomios de Taylor de orden 5 en $x=0$ de las funciones numerador y denominador. Estos polinomios se pueden hacer, bien calculando las cinco primeras derivadas de cada una de las dos funciones, o bien directamente usando el comando de DERIVE correspondiente

x^4

$$TAYLOR(\sqrt{1+x^2}-\cos x-\frac{5}{6}\log(1-x),x,0,5)=\frac{x^5}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{5x^3}{18}+\frac{17x^2}{12}+\frac{5x}{6}$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{arcsen} x^2}{\sqrt{1+x^2}-\cos x-\frac{5}{6}\log(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+R_5}{\frac{x^5}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{5x^3}{18}+\frac{17x^2}{12}+\frac{5x}{6}+R_5'}$$

donde R_5 y R_5' denotan los respectivos restos de Taylor, que como se sabe son infinitésimos de orden superior al de x^5. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{arcsen} x^2}{\sqrt{1+x^2}-\cos x-\frac{5}{6}\log(1-x)}=0$$

b) Razonando como en el apartado anterior

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^4}\cos x^4}{x(\operatorname{tg} x-\operatorname{senh} x)}=\lim_{x\to 0}\frac{TAYLOR(1-\sqrt{1+x^4}\cos x^4,x,0,5)+R_5}{TAYLOR(x(\operatorname{tg} x-\operatorname{senh} x),x,0,5)+R_5'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}+R_5}{\frac{x^4}{6}+R_5'}=-3$$

23. *Usar el polinomio de Taylor de orden 3 de* $\operatorname{sen} t$ *para aproximar el área de un segmento circular de ángulo* t.

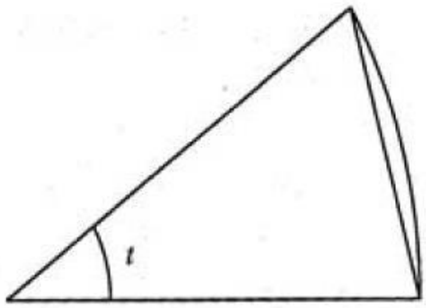

Fig. 8.8

SOLUCIÓN:

$$\text{área (triángulo)} = \frac{2r \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cdot r \cos \frac{t}{2}}{2} = \frac{r^2 \operatorname{sen} t}{2}$$

De donde

$$A = \frac{tr^2}{2} - \frac{r^2 \operatorname{sen} t}{2} = \frac{r^2}{2}(t - \operatorname{sen} t)$$

Usando que en un entorno de 0 $\operatorname{sen} t$ se puede aproximar por $t - \frac{t^3}{6}$, se tiene

$$t - \operatorname{sen} t \approx \frac{t^3}{6}$$

y así

$$A \approx \frac{r^2}{2}\frac{t^3}{6}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a las funciones siguientes en los intervalos indicados.*

   a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *en* $[-1, 1]$.

   b) $g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *en* $[-1, 1]$.

   c) $h(x) = x^3 - x$ *en* $[0, 1]$ *ó en* $[-1, 0]$.

   d) $k(x) = 1 - e^{\operatorname{sen} x}$ *en* $[0, \pi]$.

   En caso afirmativo, encontrar un punto en el que la derivada se anule. Si la respuesta es negativa, justifíquese.

2. *Demostrar que para cualquier valor de* $k \in \mathbb{R}$ *la ecuación* $x^3 - 3x + k = 0$ *no puede tener dos raíces en el intervalo* $(0, 1)$.

6. *Demostrar que la ecuación* $3^{-x} = x$ *tiene una única solución. ¿Cuál es la parte entera de la misma?*

16. *Hallar, usando L'Hôpital, los siguientes límites*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} nx - n \operatorname{tg} x}{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx}$ *c)* $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$ *e)* $\lim_{x\to \infty} \left[(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \log x\right]$ *f)* $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$

20. *a) Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 de* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *en un entorno de* $\frac{\pi}{6}$ *y usarlo para aproximar* $\operatorname{sen} \frac{1}{2}$ *dando una cota del error cometido.*

b) Realizar la estimación de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}$ *usando el polinomio de Taylor de orden 5 en el punto* $x = 0$*, acotando el error cometido.*

22. *Obtener por la fórmula de Taylor de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *el polinomio de segundo grado que mejor aproxima a la función en un entorno del punto* $x = 1$.

23. *Obtener el polinomio de McLaurin de grado 3 para la función* $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

24. *Expresar el polinomio* $x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ *como potencias de* $(x - 1)$

26. *Calcular usando desarrollos de Taylor* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x - x}$.

28. *Sea* $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. *Obtener* $f(1'005)$ *usando los 3 primeros términos del desarrollo de Taylor de* $f(x)$ *en potencias de* $x - 1$.